§4 可测函数

§4.1 广义实函数

Def. $f: A \to \overline{\mathbb{R}}$ 称为广义实函数

例. $\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$ $\quad m: \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$ $\quad m(E)$:测度

$m^*: 2^{\mathbb{R}^n} \to \overline{\mathbb{R}}$

考虑 $f_n \to f$:

$\forall M, \exists N > 0$ s.t. $\forall n \geq N$ 有 $f_n(x) \geq M$, $f_n(x) \to +\infty = f(x)$

一致收敛:

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$ s.t. $\forall n \geq N$ 有 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x$

广义实函数的有界与有限:

$\forall x \in D$, 有 $|f(x)| \leq M$: 有界 (局部有界)

$\forall x \in D$, 有 $f(x) < +\infty$: 有限

Def. $f^+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ 0, & f(x) < 0 \end{cases}$, $f^-(x) = \begin{cases} -f(x), & f(x) \leq 0. \\ 0, & f(x) > 0 \end{cases}$

$f^+(x)$ 和 $f^{-1}(x)$ 为非负函数且 $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$.

Prop. $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $f^-(x) = \max\{0, -f(x)\} = -\min\{0, f(x)\}$

$|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$.

Def. 特征函数 $\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$

Prop. $\chi_{E \cap F}(x) = \chi_E(x) \cdot \chi_F(x)$

$\chi_{E \cup F}(x) = \chi_E(x) + \chi_F(x) - \chi_{E \cap F}(x)$

Def. $E\subseteq\mathbb{R}^n$ 可测, $E=\bigcup_{i=1}^{N}E_i$ 可测且互不交, 记

$\varphi=\lambda_1\chi_{E_1}+\cdots+\lambda_N\chi_{E_N}$, $\lambda_k\in\mathbb{R}$

则称 φ 为简单函数.

例 $E=\mathbb{R}$, $\varphi=\chi_{\mathbb{Q}}+3\chi_{\mathbb{Q}^c}$

Def. 当简单函数的 E_i 均为区间时, φ 是阶梯函数.

Thm. $E\subseteq\mathbb{R}^n$ 可测集上的简单函数在四则运算下封闭

Pf. 首先知道简单函数有界且可测.

Def. $\forall a\in\mathbb{R}$, $E[f>a]=\{x\in E: f(x)>a\}\subseteq E$, 若 $E[f>a]$ 均可测, 则 f 为可测函数.

例 $f(x)=(3\chi_E+4\chi_F)(x)$, E,F 可测互不交

$$(E\cup F)[f>a]=\begin{cases} E\cup F, & a<3\\ F, & 3\le a<4\\ \phi, & a\geq 4\end{cases}$$

$$\mathbb{R}^n[f>a]=\begin{cases} \mathbb{R}^n, & a<0\\ E\cup F, & 0\le a<3\\ F, & 3\le a<4\\ \phi, & a\geq 4\end{cases}$$

Def. 设 f 在 E 上有限, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\,\delta(x_0,\varepsilon)>0$ s.t. $\rho(x,x_0)<\delta$ 时 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, 则称 f 在 x_0 点连续.

若: $\forall\varepsilon>0$, $\exists\,\delta(\varepsilon)>0$, s.t. $\forall\rho(x,x_0)<\delta$ 时有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, $\forall x_0\in E$, 则称 f 在 E 上一致连续

例 $\chi_{\mathbb{Q}}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上连续, $\mathbb{Q}^c$ 上连续, 但在 $\mathbb{R}^n$ 上处处不连续.

Thm. 若 E,F 为闭集, $f\in C(E)$, $f\in C(F)$, 则 $f\in C(E\cup F)$.

Pf. (1) $x_0\in E\cap F$: $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta_1>0$ s.t. $x\in E$ 时 $\rho(x,x_0)<\delta_1$

有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$; $\exists\delta_2>0$ s.t. $x\in F$ ……

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, $\forall x\in E\cup F$, $\rho(x,x_0)<\delta$ 时

有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

(2) $x_0\in E\setminus F$: 则 $x_0\notin F$, $\exists\delta_3>0$ s.t. $O(x_0,\delta_3)\subseteq F^c$ (F 闭集)

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_3\}$, $\forall x\in E\cup F$, $\rho(x,x_0)<\delta$ 时

有 $x\in E\setminus F$ 且 $\rho(x,x_0)<\delta_1$, $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

(3) $x_0\in F\setminus E$: 类似也有.

Thm. 设 E 为 $\mathbb{R}^n$ 中有界闭集(紧集), $f\in C(E)$, 则:

(1) f 在 E 上有界

(2) f 在 E 上有最值

(3) f 在 E 上一致连续

(4) 若 E 是连通的, 则有介值性

Pf. (1) 取 $\varepsilon=1$, $\forall x\in E$, $\exists\delta_x>0$ s.t. $y\in E\cap O(x,\delta_x)$ 有 $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$

即 $|f(y)|\le|f(x)|+1$, 在 $E\cap O(x,\delta_x)$ 上 f 有界.

事实上 $E\subseteq\bigcup_{x\in E}O(x,\delta_x)$, 于是 $\exists\{x_k\}_{k=1}^N$ s.t. $E\subseteq\bigcup_{k=1}^N O(x_k,\delta_k)$

取 $M=\max\{|f(x_k)+1|\}$, 则 $|f(x)|\le M$, $\forall x\in E$.

(2) 令 $M=\sup\{f(x):x\in E\}<+\infty$

$\exists x_n\in E$ s.t. $M-\frac{1}{n}<f(x_n)\le M$, $n\to+\infty$

$\{x_n\}$ 有界, $\exists\{x_{n_k}\}$ s.t. $x_{n_k}\to x_0\in E$

由 f 连续, $f(x_0)=\lim_{k\to+\infty}f(x_{n_k})=M$.

(3) $\forall\varepsilon>0$, $\forall x$, $\exists\delta_x>0$ s.t. $\forall y\in E\cap O(x,\delta_x)$ 有 $|f(y)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$

于是 $\exists\{x_k\}_{k=1}^N$ s.t. $E\subseteq\bigcup_{k=1}^N O(x_k,\frac{\delta_k}{3})$

取 $\delta=\min\{\frac{\delta_1}{3},\cdots,\frac{\delta_N}{3}\}$，当 $x,y\in E$，$\rho(x,y)<\delta$ 时，

由 $x\in E\subseteq\bigcup\limits_{k=1}^{N}O(x_k,\frac{\delta_k}{3})$，$\exists k_0$ s.t. $\rho(x,x_{k_0})<\frac{\delta_{k_0}}{3}<\delta_{k_0}$

又有 $\rho(x,y)<\delta<\frac{\delta_{k_0}}{3}$，$\rho(y,x_{k_0})<\frac{2\delta_{k_0}}{3}<\delta_{k_0}$

于是 $|f(y)-f(x_{k_0})|<\frac{\varepsilon}{3}$，$|f(x)-f(y)|<\frac{2\varepsilon}{3}=\varepsilon$.

(4) $c\in[m,M]$，由 E 连通，$\exists$ 连续函数 $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^n$

$\gamma(0)=x_0$，$\gamma(1)=y_0$

令 $g=f(\gamma(t))$，$t\in[0,1]$，$\forall c\in[m,M]$，$\exists t_0\in[0,1]$ s.t. $g(t_0)=c$.

令 $z_0=\gamma(t_0)\in E$，$f(z_0)=g(t_0)=c$.